Universidad de Talca
Campus Curicó

NOTA	

Prueba N° 3

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Módulo:	Carrera:	Sección:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Los útiles (lápiz, goma, etc.) son de uso personal.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
- Queda prohibido el uso de calculadoras y formulario.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

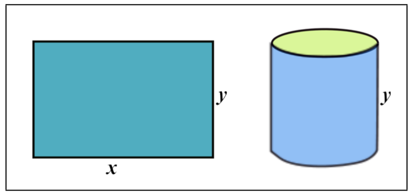
Nota $= 1 + \frac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) **[20 ptos.]** Una hoja rectangular de perímetro 36 cm (como se muestra en la figura) y dimensiones x por y cm se enrolla a manera de cilindro. ¿Qué valores de x e y dan el mayor volumen?, ¿Cuál es ese volumen?



Solución: Se tiene que $x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$, ademas $2x + 2y = 36 \Rightarrow y = 18 - x$. Luego el volumen viene dado por:

$$V(x,y) = \frac{x^2 y}{4\pi} \Rightarrow V(x) = \frac{1}{4\pi}x^2(18-x) = \frac{1}{4\pi}(18x^2 - x^3)$$

5 pts

Derivando tenemos que :

$$V'(x) = \frac{3}{4\pi}(12x - x^2) \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi}x(12-x) = 0$$

Por lo que únicos puntos críticos son $x = 0$ y $\boxed{x = 12}$. Se descarta $x = 0$ por ser una magnitud. Analizando este punto por el criterio de la segunda derivada se obtiene que:

$$V''(x) = \frac{3}{2\pi}(6-x) \quad \Rightarrow V''(12) < 0$$

Así $x = 12$ es el máximo buscado e $y = 6$. 10 pts

Por lo tanto

$$V_{max} = \frac{216}{\pi}\text{cm}^3$$

5 pts

2) Respecto a la función $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ se pide:

a) **(3pt)** Encuentre el dominio e intersección con los ejes.

b) **(2pt)** Halle asíntotas horizonales y/o verticales si es que existen.

c) **(5pt)** Calcule $f'(x)$ y entrege el resultado de la manera mas simple posible.

d) **(5pt)** Encuentre intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos (si es que existen)

e) **(5pt)** Determine los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, así como los puntos de inflexión (si es que existen)
Ayuda:

$$f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

f) **(5pt)** Realice la gráfica de $f(x)$

Solución:

a)
- $Dom(f) = \mathbb{R}$ — 1 pts
- Corte eje X: $(0,0)$, $(6,0)$ — 1 pts
- Corte eje Y: $(0,0)$ — 1 pts

b) No hay asíntotas verticales ni horizontales — 2 pts

c) $f'(x) = \dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ — 5 pts

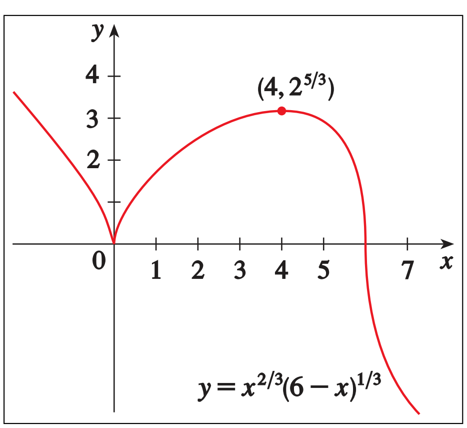
d) La tabla de signos es la siguiente:

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x<0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente en $(-\infty, 0)$
$0<x<4$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente en $(0, 4)$
$4<x<6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(4, 6)$
$x>6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(6, \infty)$

5 pts

e) Analizando de forma similar pero con la segunda derivada tenemos que f es cóncava hacia arriba en $]6, +\infty[$ y f es cóncava hacia abajo en $]-\infty, 0[,], 0, 6[$ — 5 pts

f) Gráfica:



5 pts

3) **[15 ptos.]** Usando la regla de L'Hopital calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x}}{\sin x - x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{x}}{\sin x - x} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^{x}}{\cos x - 1} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} - e^{x}}{-\sin x} && \color{red}{5 \text{ pts}} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x e^{\sin x} - \sin x \cos x e^{\sin x} - 2\cos x \sin x e^{\sin x} + \cos^3 x e^{\sin x} - e^{x}}{-\cos x} && \color{red}{5 \text{ pts}} \\
&= 1 && \color{red}{5 \text{ pts}}
\end{aligned}$$